0～1の比率の正確な信頼区間

調査したサンプル中の比率から母集団（ロットなど）の比率を推定する場合に、比率の信頼区間を求めて検討することがあります。

比率の信頼区間の計算には、２項分布の信頼区間の正規分布近似式

$$p \pm u_{\alpha}\sqrt{pq/n} \qquad \cdots (1)$$

がよく紹介されています。ここで、$p = x/n$、$q = 1 - p$、nは試行数、xは興味ある事象の発生回数、u_{α}は危険率αのときの正規分布のパーセント点です。

サンプル内の比率から母集団の比率を推定する場合は、nはサンプル数、xはサンプル内の興味ある事象の発生回数です。

(1)式は、pが０又は１に近い場合やnが小さい場合には精度的が悪いと指摘されています。２項分布を正規分布で近似可能な条件には経験則として３通りあります。

1) npとnqの小さい方が 10 より大きい。10 の代わりに 5 が用いられる場合あります。
2) $0.1 \le p \le 0.9$で、かつ$5 < npq$ 。
3) $25 < npq$

参考文献

蓑谷千夫彦凰彦 (2003). 統計分布ハンドブック, 朝倉出版, 東京, p.483.２項分布の正規近似

そこで、正規近似が悪い条件においては、２項分布の信頼区間に F 分布を利用した Clopper＆ Pearson の信頼区間と呼ばれている正確な信頼区間を用いる方が良いです。

$$\text{信頼区間上限値} p_{upper} = \frac{\nu_1 F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)}{\nu_2 + \nu_1 F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)} = \frac{(x+1)F_{1-\alpha/2}(2(x+1), 2(n-x))}{(n-x)+(x+1)F_{1-\alpha/2}(2(x+1), 2(n-x))}$$

ただし、$\nu_1 = 2(x+1)$、$\nu_2 = 2(n-x)$

信頼区間下限値$p_{lower} = \dfrac{\nu_2'}{\nu_2' + \nu_1' F_{1-\alpha/2}(\nu_1', \nu_2')} = \dfrac{x}{x + (n-x+1) F_{1-\alpha/2}(2(n-x+1), 2x)}$

ただし、$\nu_1' = 2(n-x+1)$、$\nu_2' = 2x$

95%信頼区間を求める場合、$F_{1-\alpha/2}$ には上側 2.5%の F 値を代入します。

Clopper＆ Pearson の信頼区間は、p_{lower} ～ p_{upper} になります。

参考文献

Clopper, C.J. and Pearson, E.S. (1934). The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of binomial. Biometrika, 26, 404-413.

例題1： $n = 150$、$x = 10$ の場合（正規近似の条件 1）をほぼ満たす場合）

$p = x/n = 10/150 = 1/15 = 0.067 \approx 0.07$

$$p_{upper} = \frac{(10+1) F_\alpha(2(10+1), 2(150-10))}{(150-10) + (10+1) F_\alpha(2(10+1), 2(150-10))} = \frac{11 F_\alpha(22, 280)}{140 + 11 F_\alpha(22, 280)}$$

$F_{0.975}(22, 280) = 1.722138$ を代入すると、

$$p_{upper} = \frac{11 \times 1.722138}{140 + 11 \times 1.722138} = 0.119 \approx 0.12$$

$$p_{lower} = \frac{10}{10 + (150-10+1) F_{1-\alpha/2}(2(150-10+1), 2\times 10)} = \frac{10}{10 + 139 F_{1-\alpha/2}(278, 20)}$$

$F_{0.975}(278, 20) = 2.116457$ を代入すると、

$$p_{lower} = \frac{10}{10 + 139 \times 2.116457} = 0.0328 \approx 0.03$$

よって、Clopper＆ Pearson の 95%信頼区間は、0.03 ～ 0.12 になります。

(1)式の正規近似を用いた場合の 95%信頼区間は、0.03 ～ 0.11 になります。

$$p \pm u_{\alpha}\sqrt{pq/n} = \frac{10}{150} \pm 1.96\sqrt{\frac{10}{150}\left(1-\frac{10}{150}\right)\Big/150} = 0.07 \pm 0.04$$

例題 2： $n=50$、$x=3$ の場合（正規近似の条件を満たさない場合）

$p = x/n = 3/50 = 0.06$

$$p_{upper} = \frac{(3+1)F_{\alpha}\left(2(3+1), 2(50-3)\right)}{(50-3)+(3+1)F_{\alpha}\left(2(3+1), 2(50-3)\right)} = \frac{4F_{\alpha}(8,94)}{47+4F_{\alpha}(8,94)}$$

$F_{0.975}(8,94) = 2.329983$ を代入すると、

$$p_{upper} = \frac{4 \times 2.329983}{47 + 4 \times 2.329983} = 0.165 \approx 0.17$$

$$p_{lower} = \frac{3}{3+(50-3+1)F_{1-\alpha/2}\left(2(50-3+1), 2\times 3\right)} = \frac{3}{3+48F_{1-\alpha/2}(96,6)}$$

$F_{0.975}(96,6) = 4.91814$ を代入すると、

$$p_{lower} = \frac{3}{3 + 48 \times 4.91814} = 0.0125 \approx 0.01$$

よって、Clopper＆ Pearson の 95%信頼区間は、0.01 ～ 0.17 になります。

(1)式の正規近似を用いた場合の 95%信頼区間は、0 ～ 0.13 になります（負の比率は考えないのでー0.01 は 0 で置き換え）。

$$p \pm u_{\alpha}\sqrt{pq/n} = \frac{3}{50} \pm 1.96\sqrt{\frac{3}{50}\left(1-\frac{3}{50}\right)\Big/50} = 0.06 \pm 0.07$$

例題 3： $n=30$、$x=1$ の場合（正規近似の条件を満たさない場合）

$p = x/n = 1/30 = 0.033 \approx 0.03$

$$p_{upper} = \frac{(1+1)F_{\alpha}\left(2(1+1), 2(30-1)\right)}{(30-1)+(1+1)F_{\alpha}\left(2(1+1), 2(30-1)\right)} = \frac{2F_{\alpha}(4,58)}{29+2F_{\alpha}(4,58)}$$

$F_{0.975}(4,58) = 3.015662$ を代入すると、

$$p_{upper}=\frac{2\times3.015662}{29+2\times3.015662}=0.172\approx0.17$$

$$p_{lower}=\frac{1}{1+(30-1+1)F_{1-\alpha/2}\left(2(30-1+1),2\times1\right)}=\frac{1}{1+30F_{1-\alpha/2}(60,2)}$$

$F_{0.975}(60,2)=39.48123$を代入すると、

$$p_{lower}=\frac{1}{1+30\times39.48123}=0.000843\approx0.00$$

よって、Clopper＆ Pearson の 95%信頼区間は、0.00 ～ 0.17 になります。

(1)式の正規近似を用いた場合の 95%信頼区間は、0 ～ 0.10 になります（負の比率は考えないので－0.03 は 0 で置き換え)。

$$p\pm u_{\alpha}\sqrt{pq/n}=\frac{1}{30}\pm1.96\sqrt{\frac{1}{30}\left(1-\frac{1}{30}\right)\Big/30}=0.033\pm0.064$$