泥質（有明）干潟地上に築造する堤塘の安定について（第2報）

藤川武信
福岡農業専門学校

Fujikawa, T. Research of the stability of dykes built on Ariake muddy tidal shore (II)

〔I〕**緒言**　問題を二次元的に取扱つて Airy の Stress Function を使用し，地盤内の応力分布を解析した．Strohschneider は拡がりの限界角を考へて Boussinesq の公式を修正し，さらに Fröhlich は地盤は完全に弾性体ではないといふ理由から集中係数 ν を取り入れて公式を導出した．本論においては有明干潟地における適当な実験数値がないので，前二者の考へを考慮に入れて応力函数を決定して，これより応力分布を求め有明泥土地盤内の応力分布推定の一資料とする目的で解析を試みた．

〔II〕**Stress Function 地盤内の應力**　高次の微分量を省略することにより得られる釣合の方程式は

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0,\quad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

（R；単位体積についての導径方向の物体力）

Rがなければ (1) の解として Stress Function $\phi(r, \theta)$ を用ひる，即ち

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2},\qquad \sigma_\theta=\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2},\qquad \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \quad\cdots\cdots(2)$$

とすれば，之は (1) を満足するから r, θ の任意の函数 $\phi(r, \theta)$ を (2) に代入することにより R=0 のときの応力度成分が得られる．鉛直方向の応力成分の和は荷重Pに等しいから

$$R=2\left[\left|\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{\theta=\varphi}\cdot\sin\varphi+\frac{1}{r}\left\{\left|\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right|_{\theta=\varphi}\cdot\cos\varphi-\left|\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}\right\}\right] \quad\cdots\cdots(3)$$

(3) は Stress Function $\phi(r, \theta)$ の満足せねばならぬ一つの條件である．次に Stress Function を決定する．Pの働く半無限体を考へ着力点を中心とし半径 r の半円を考へると，力は着力点に集まる放射線に沿つて拡散するものとすると σ は $\left(\frac{1}{r}\right)^n$ に比例するから Stress Function を次式の如くおくことにする．

$$\phi(r, \theta)=F(\theta)\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^n$$

之を (3) に代入すれば

$$P=\frac{2}{r^{n+1}}\left[-n\left|F(\theta)\right|_{\theta=\varphi}\cdot\sin\varphi+\left|\frac{\partial}{\partial \theta}F(\theta)\right|_{\theta=\varphi}\cdot\cos\varphi-\left|\frac{\partial}{\partial \theta}F(\theta)\right|_{\theta=0}\right]$$

任意の円形断面を考へそこに生づる応力の鉛直方向成分の和はPに等しく r に無関係であるから n=1，故に

$$\phi(r, \theta)=F(\theta)\cdot r \quad\cdots\cdots(4)$$

Stress Function は Compatibility Equation

$$\nabla^2\cdot\nabla^2\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right)=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

を満足せねばならぬ．(4), (5) より

$$\nabla^2\cdot\nabla^2\{F(\theta)\cdot r\}=0$$

即ち

$$\frac{\partial^4}{\partial \theta^4}\{F(\theta)\cdot r\}+2\frac{\partial^4}{\partial \theta^2\partial r^2}\{F(\theta)\cdot r\}+\frac{\partial^4}{\partial r^4}\{F(\theta)\cdot r\}=0^{*1)}$$

*1）S. Timoshenko; Theory of Elasticity. 1934, p. 54.

二次面として考へるから一般積分は

$$F(\theta)=\cos\theta\cdot(A_0+A_1\theta)+\sin\theta\cdot(B_0+B_1\theta) \quad\cdots\cdots(6)$$

応力分布は対称軸をもつから

$$\phi(r,\theta)=\phi(r,-\theta) \quad\cdots\cdots(7)$$

$$\therefore\ F(\theta)\cdot r=F(-\theta)\cdot r$$

これより $F(\theta)=A_0\cos\theta+B_1\theta\sin\theta$ ……(8)

Frölich の集中係数[*2] のような Constant を考慮して

$$\Psi(\theta)=A_0\cos\xi\theta \qquad (\xi=\text{const.})$$

とすると Stress Function は

$$F(r,\theta)=\{\Psi(\theta)+B_1\theta\sin\theta\}\cdot r \quad\cdots\cdots(9)$$

故に $\left|\sigma_r\right|_{\theta=\varphi}=\left|\frac{1}{r^2}\{\Psi(\theta)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Psi(\theta)+2B_1\cos\theta\}\right|_{\theta=\varphi}$ ……(10)

$$\left|\sigma_\theta\right|_{\theta=\varphi}=0 \quad\cdots\cdots(11),\qquad \left|\tau_{r\theta}\right|_{\theta=\varphi}=0 \quad\cdots\cdots(12)$$

(10) より $\left|\sigma_r\right|_{\theta=\varphi}=\frac{1}{r}\{A_0(1-\xi^2)\cos\xi\varphi+2B_1\cos\varphi\}$ ……(13)

(3) より $P=2\,[A_0(\cos\xi\varphi\sin\varphi-\xi\cos\varphi\sin\xi\varphi)+B_1(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi)]$ ……(14)

故に (13), (14) より

$$B_1=\frac{P(1-\xi^2)\cos\xi\varphi}{2\{(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi)(1-\xi^2)\cos\xi\varphi-2\cos\varphi(\cos\xi\varphi\sin\varphi-\xi\cos\varphi\sin\xi\varphi)\}} \quad\cdots\cdots(15)$$

$$A_0=\frac{P\cos\varphi}{2\cos\varphi(\cos\xi\varphi\sin\varphi-\xi\cos\varphi\sin\xi\varphi)-(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi)(1-\xi^2)\cos\xi\varphi} \quad\cdots\cdots(16)$$

いま $2\cos\varphi=c_1$, $(1-\xi^2)\cos\xi\varphi=c_2$, $\cos\xi\varphi\sin\varphi-\xi\cos\varphi\sin\xi\varphi=c_3$ $\sin\varphi\cos\varphi+\varphi=c_4$, $2\{c_1\cdot c_3-c_4\cdot c_2\}=C$ とおくと

$$A_0=\frac{P\cdot c_1}{C} \quad\cdots\cdots(17) \qquad B_1=-\frac{P\cdot c_2}{C} \quad\cdots\cdots(18)$$

故に求むる Stress Function は (9), (17), (18) より

$$F(r,\theta)=\frac{P\cdot r}{C}(c_1\cos\xi\theta-c_2\theta\sin\theta) \quad\cdots\cdots(19)$$

地盤内の応力は (2), (19) より

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{P}{r\cdot C}\{c^1\cos\xi\theta\cdot(1-\xi^2)-2c_2\cos\theta\}\\ \sigma_\theta&=\tau_{r\theta}=0\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(20)$$

直線境界面から深さZにおける水平面を考へれば，応力度の垂直，水平及び剪断分力 σ_z, σ_x, τ_{zx} は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z&=\frac{P}{Z\cdot C}\{c_1\,\mathrm{cso}\,\xi\theta\cdot(1-\xi^2)-2c_2\cos\theta\}\cos^3\theta\\ \sigma_x&=\frac{P}{Z\cdot C}\{c_1\cos\xi\theta\cdot(1-\xi^2)-2c_2\cos\theta\}\sin^2\theta\cos\theta\\ \tau_{zx}&=\frac{P}{Z\cdot C}\{c_1\cos\xi\theta\cdot(1-\xi^2)-2c_2\cos\theta\}\sin\theta\cos^2\theta\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(21)$$

〔Ⅲ〕 ξ の値と σ_z, σ_x, τ_{zx}. 載荷重直下の σ_r は (20) の $\theta=0$ とすることにより得られるから

$$\left|\sigma_r\right|_{\theta=0}=\frac{P}{r\cdot C}\{c_1(1-\xi^2)-2c_2\} \quad\cdots\cdots(22)$$

Strohschneider[*3] は圧力の伝達を考へるに当り拡がりの限界角 θ_0 を考察して次式の如く σ_z を与へ $\theta=50°\sim60°$ とすると実験とよく一致するといつてゐる．

＊2） O. K. Fröhlich; Druckverteilung in Baugrunde; Wien, 1934.

＊3） Strohschneider; Elastische Druckverteilung. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Feb. 1912.

$$\sigma_x = \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{P}{Z^2}\cdot\frac{(\cos\theta - \cot\theta_0 \sin\theta)\cos^4\theta}{1-\cos\theta_0} \quad\cdots\cdots(23)$$

それ故に限界角 $\varphi=60°$ の場合を (22) より求める

（A）$\varphi=60°$ のとき　Frölich[*4] は放射応力 $\sigma_r = \dfrac{\nu}{2\pi r^2}\cos^{\nu-2}\theta$ としたから

$$\sigma_z = \frac{\nu P}{2\pi r^2}\cos^{\nu}\theta \quad\cdots\cdots(24)$$

Strohschneider の限界角と Fröhlich の集中係数との間の関係は (23), (24) の $\theta=0$ とすると

$$\frac{3P}{2\pi Z^2(1-\cos\theta_0)} = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \quad (\because Z=r)$$

$$\therefore\quad \nu = \frac{3}{1-\cos\theta_0} \quad\cdots\cdots(25)$$

故に $\varphi=60°$ とすると $\nu=6$ となる[*5]．かくして単位長につきPなる荷重が働いてゐるとすると

Tab. 1

ξ	c_2	c_3	C	$\lvert\sigma_r\rvert_{\theta=0}/\frac{P}{r}$
0	1.000	0.866	−1.228	0.814
1	0.000	0.000	0.000	—
2	1.500	−1.299	−7.038	0.852
3	8.000	−0.866	−25.412	0.944
4	7.500	1.299	−18.602	1.020
5	−12.000	2.598	40.716	0.000

$c_1=1.000$,　$c_4=1.480$

$$\sigma_z = 2\pi r\cos^{\nu}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\nu P}{2\pi r^2}\cos^{\nu}\theta\cdot d\theta = \frac{15}{16}\cdot\frac{P}{r}\cos^6\theta$$

載荷重直下においては $\theta=0$ であるから

$$\left|\sigma_z\right|_{\theta=0} = \frac{15}{16}\cdot\frac{P}{r} = 0.9375\cdot\frac{P}{r} \quad\cdots\cdots(26)$$

故に Teb. 1, (26) より $\varphi=60°$ なるときは $\xi=3$ をとるべきである．又拡がりの限界角 φ と土る内部摩擦角 ρ との関係は

$$\varphi = \frac{\pi}{4}+\frac{\rho}{2} \text{ [*6]} \quad\cdots\cdots(27)$$

であるから $\varphi=60°$ のときは $\rho=30°$ である．ここにおいて $\xi=3$ より $c_1=1.000$, $c_2=8.000$, $C=-25.412$ であるから (20), (21) より

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_r\right|_{\rho=\frac{\pi}{6}} &= -\frac{1}{25.412}\{-8\cos3\theta-16\cos\theta\}\cdot\frac{P}{r}\\ \left|\sigma_\theta\right|_{\rho=\frac{\pi}{6}} &= \left|\tau_{r\theta}\right|_{\rho=\frac{\pi}{6}}=0\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(28)$$

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_z\right|_{\rho=\frac{\pi}{6}} &= -\frac{1}{25.412}\{-8\cos3\theta-16\cos\theta\}\cos^3\theta\cdot\frac{P}{Z}\\ \left|\rho_x\right|_{\rho=\frac{\pi}{6}} &= -\frac{1}{25.412}\{-8\cos3\theta-16\cos\theta\}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\frac{P}{Z}\\ \left|\tau_{zx}\right|_{\rho=\frac{\pi}{6}} &= -\frac{1}{25.412}\{-8\cos3\theta-16\cos\theta\}\sin\theta\cos^2\theta\cdot\frac{P}{Z}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(29)$$

Tab. 2

ξ	c_2	c_3	C	$\lvert\sigma_r\rvert_{\theta=0}/\frac{P}{r}$
0	1.000	0.819	−0.980	0.869
1	0.000	0.000	0.000	—
2	1.026	−1.359	−6.054	0.908
3	7.728	−1.237	−24.942	0.983
4	11.490	0.849	−30.912	1.300
5	−2.088	2.930	12.700	−1.841

$c_1=1.148$,　$c_4=1.430$

（B）$\varphi=55°$（$\rho=20°$）のとき　Teb; 2, (26) より $\varphi=55°$（$\rho=20°$）なるときは $\xi=2$ をとる．ここにおいて $\xi=2$ より $c_1=1.148$, $c_2=1.026$, $C=6.054$ であるから (20), (21) より

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_r\right|_{\rho=\frac{\pi}{9}} &= -\frac{1}{6.054}\{-3.444\cos2\theta\\ &\qquad -2.052\cos\theta\}\frac{P}{r}\\ \left|\sigma_\theta\right|_{\rho=\frac{\pi}{9}} &= \left|\tau_{r\theta}\right|_{\rho=\frac{\pi}{9}}=0\end{aligned}\right\} \cdots(30)$$

＊4）O. K. Fröhlich；前出

＊5）Cummings; Distribution of Stress under a Foundation. Proc. A. S. C. E. 1935.

＊6）Z. Anzo; Pressure Exerted by Granular or Pulverulent Material. The Memo. of the Faculty of Engin., Kyushu Imp. Univ., Vol. No. 2, June, 1933.

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_z\right|_{\rho=\frac{\pi}{9}}&=-\frac{1}{6.054}\{-3.444\cos 2\theta-2.052\cos\theta\}\cos^3\theta\cdot\frac{P}{Z}\\\left|\sigma_x\right|_{\rho=\frac{\pi}{9}}&=-\frac{1}{6.054}\{-3.444\cos 2\theta-2.052\cos\theta\}\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{P}{Z}\\\left|\tau_{zx}\right|_{\rho=\frac{\pi}{9}}&=-\frac{1}{6.054}\{-3.444\cos 2\theta-2.052\cos\theta\}\sin\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\frac{P}{Z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

Teb. 3

ξ	c_2	c_3	C	$\left\|\sigma_r\right\|\theta=0/\frac{P}{r}$
0	1.000	0.766	−0.762	0.937
1	0.000	0.000	0.000	—
2	0.522	−1.401	−5.026	0.975
0	6.928	−1.528	−22.858	1.056
4	14.100	0.160	−38.110	1.246
5	8.208	2.760	−15.326	3.085

$c_1=1.286,\ c_4=1.366$

（C）$\varphi=50°$（$\rho=10°$）のとき　Teb. 3, (26) より $\varphi=50°$（$\rho=10°$）なるときは $\xi=0$ をとる．ここにおいて $\xi=0$ より $c_1=1.286$, $c_2=1.000$, $C=0.762$ であるから (20), (21) より

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_r\right|_{\rho=\frac{\pi}{18}}&=-\frac{1}{0.762}\{1.286-2\cos\theta\}\frac{P}{r}\\\left|\sigma_\theta\right|_{\rho=\frac{\pi}{18}}&=\left|\tau_{r\theta}\right|_{\rho=\frac{\pi}{18}}=0\end{aligned}\right\}\cdots(32)$$

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_z\right|_{\rho=\frac{\pi}{18}}&=-\frac{1}{0.762}\{1.286-2\cos\theta\}\cos^3\theta\cdot\frac{P}{Z}\\\left|\sigma_x\right|_{\rho=\frac{\pi}{18}}&=-\frac{1}{0.762}\{1.286-2\cos\theta\}\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{P}{Z}\\\left|\tau_{zx}\right|_{\rho=\frac{\pi}{18}}&=-\frac{1}{0.762}\{1.286-2\cos\theta\}\sin\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\frac{P}{Z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

〔IV〕 有明干潟土にたいする ξ の値及び σ_z, σ_x, τ_{zx}.

Teb. 4

ξ	c_2	c_3	C	$\left\|\sigma_r\right\|\theta=0/\frac{P}{r}$
0	1.000	0.713	−0.588	1.017
1	0.000	0.000	0.000	—
2	0.051	−1.414	−4.098	1.051
3	5.800	−1.964	−20.518	1.112
4	14.985	−0.614	−40.502	1.259
5	16.224	2.101	−36.096	1.831

$c_1=1.402,\ c_4=1.294$

有明干潟土は $\rho=0°48'\sim1°00'$ である．*7) 今 $\rho=1°00'$ とすると $\varphi=45°30'$ であるから Teb. 4, (26) より $\xi=0$ をとる．ここにおいて $\xi=0$ より $c_1=1.402$, $c_2=1.000$, $C=-0.588$ であるから (20), (21) より

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_r\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=-\frac{1}{0.588}\{1.402-2\cos\theta\}\frac{P}{r}\\\left|\sigma_\theta\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=\left|\tau_{r\theta}\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}=0\end{aligned}\right\}\cdots(34)$$

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_z\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=-\frac{1}{0.588}\{1.402-2\cos\theta\}\cos^3\theta\frac{P}{Z}\\\left|\sigma_x\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=-\frac{1}{0.588}\{1.402-2\cos\theta\}\sin^2\theta\cos\theta\frac{P}{Z}\\\left|\tau_{xx}\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=-\frac{1}{0.588}\{1.402-2\cos\theta\}\sin\theta\cos^2\theta\frac{P}{Z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

(35) は有明干潟土にたいする線荷重による鉛直，水平，剪断応力である．

〔V〕 分布荷重　有明干潟について次式を求めた．一般分布荷重については

$$\left.\begin{aligned}\left|\sigma_z\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=\frac{P}{C}\left\{\int_{\beta_1}^{0}f(\zeta)\cdot\lambda\cdot\cos\theta\,d\theta-\int_0^{\beta_2}f(\zeta^1)\cdot\lambda\cdot\cos\theta\,d\theta\right\}\\\left|\overline{\sigma_x}\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=\frac{P}{C}\left\{\int_{\beta_1}^{0}f(\zeta)\cdot\lambda\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta-\int_0^{\beta_2}f(\zeta^1)\cdot\lambda\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta\right\}\\\left|\overline{\tau_{zx}}\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}}&=\frac{P}{C}\left\{\int_{\beta_1}^{0}f(\zeta)\cdot\lambda\cdot\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\beta_2}f(\zeta^1)\cdot\lambda\cdot\sin\theta\,d\theta\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

*7) 高田雄之，関実；有明干潟土の剪断抵抗試験について．農業土木研究，Vol. 11, No. 3, 昭．14〜9．

$$\text{但し}\quad \frac{2(\tan\beta_0-\tan\theta)}{\tan\beta_2-\tan\beta_1}=\zeta,\quad \frac{2(\tan\theta-\tan\beta_0)}{\tan\beta_2-\tan\beta_1}=\zeta',\quad \{c_1(1-\xi^2)\cos\xi\,\theta-2c_2\cos\theta\}=\lambda$$

等分布荷重については

$$\left.\begin{aligned}
\left|\bar{\sigma}_z\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}} &= -\frac{P}{0.588}\{1.402[\sin\theta]_{\beta_1}^{\beta_2}-[\theta+\sin\theta\cos\theta]_{\beta_2}^{\beta_1}\}\\
\left|\bar{\sigma}_x\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}} &= -\frac{P}{0.588}\{1.402\,[\ln\,\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})]_{\beta_1}^{\beta_2}-1.402[\sin\theta]_{\beta_1}^{\beta_2}-[\theta-\sin\theta\cos\theta]_{\beta_1}^{\beta_2}\}\\
\left|\tau_{zx}\right|_{\rho=\frac{\pi}{180}} &= -\frac{P}{0.588}\{-1.402\,[\cos\theta]_{\beta_1}^{\beta_2}-[\sin\theta]_{\beta_1}^{\beta_2}\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(37)$$

（β_1, β_2 は任意点の荷重両端と鉛直線とのなす角）

〔VI〕 結 言　有明泥土地にて荷重下における応力分布の状態を求めたと同時に，底面における圧力分布を求めることが出来た．有明泥土地にて底幅2·b荷重 P ＝ 2·b·P にたいする線荷重，等分布荷重による応力（σ_z）分布を算定すれば図の如くである．図中細線は線荷重によるものであり太線は等分布荷重によるものである（紙数の関係で他の算定結果，図は割愛する.）又このとき線端下の σ_z は地表面より2·b下において最大値を与へてゐる．