カイ２乗分布とＦ分布の関係

a)カイ２乗分布の定義より、正規分布(平均=μ、分散=σ^2)に従う確率変数x_iの偏差平方和$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$と分散$\sigma^2$の比は自由度$n$のカイ２乗分布をします。

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\chi_n^2 \qquad (1)$$

になります。χ^2(カイ２乗)の添え字nはχ^2の自由度を示しています。

b)(１)式を変形すると

$$\frac{n\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}{\sigma^2}=\chi_n^2 \qquad (2)$$

が得られます。

c)(２)式の分子のように偏差平方和は、

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = n\times\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n} \qquad (3)$$

すなわち、偏差平方和=自由度×分散に分解できます。

d)正規分布に従う二つの確率変数の分散の比の分布が Ｆ 分布です。(２)式の$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Big/n$は自由度$n$の標本分散、$\sigma^2$は母集団の分散(自由度は$\infty$)ですから、

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}{\sigma^2}=F_{n,\infty} \qquad (4)$$

は二つの分散の比、Ｆ値になります。Ｆ値の添え字は、分子の分散の自由度(第１自由度)nおよび分母の分散の自由度(第２自由度)∞(無限大)を表しています。

e)（１）式、（２）式および（４）式より

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\chi_n^2=\frac{n\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{n}}{\sigma^2}=n\times F_{n,\infty} \quad (5)$$

になります。

これがカイ２乗分布とＦ分布の関係です。